**Trabajo Práctico N° 0:**

**Repaso de Matemática.**

**Ejercicio 1.**

*Si A es una matriz simétrica y definida positiva, mostrar que puede hallarse una matriz P no singular tal que se verifica que A= PP´.*

Como A es una matriz cuadrada simétrica (A= A´), se puede diagonalizar ortogonalmente:

A= CDC´

A= CC´ donde = diag (, , … , )

A= C()´C´

A= C(C)´

A= PP´, donde P= C.

A su vez, se tiene que:

det (P)= det (C)

det (P)= det (C) det ()

det (P) 0.

Como A es una matriz diagonalizable ortogonalmente (producto de ser una matriz cuadrada simétrica), det (C) 0 y, como A es definida positiva, det () 0, por lo que det (P) 0 y, por lo tanto, P es una matriz no singular.

**Ejercicio 2.**

*Sea x un vector aleatorio de n x 1 tal que x (, ), donde es una matriz simétrica y definida positiva. Mostrar que (x - )´ (x - ) (n).*

Como es una matriz simétrica y definida positiva, existe una matriz P no singular tal que:

= PP´.

Luego, se tiene:

=

=

(x - )´ (x - )= (x - )´ (x - )

(x - )´ (x - )= (x - )´ ()´ (x - )

(x - )´ (x - )= [ (x - )]´ (x - )

(x - )´ (x - )= z´z, donde z= (x - ).

Notar que:

E (z)= E [ (x - )]

E (z)= E (x - )

E (z)= [E (x) - E ()]

E (z)= ( - )

E (z)= \* 0

E (z)= 0.

y

V (z)= E (zz´)

V (z)= E { (x - ) [ (x - )]´}

V (z)= E [ (x - ) (x - )´ ()´]

V (z)= E [(x - ) (x - )´] ()´

V (z)= ()´

V (z)= PP´

V (z)= II

V (z)= I.

Por lo tanto, z (0, I) y, considerando que la suma de variables aleatorias normales estándar independientes elevadas al cuadrado tiene una distribución , se tiene:

+ + … +

z´z

(x - )´ (x - ) .

**Ejercicio 3.**

*Sea x un vector aleatorio de nx1, siendo x (, ), y A y B son matrices de nxn simétricas e idempotentes. Mostrar que las formas cuadráticas x´Ax y x´Bx son independientes si y sólo si AB= 0.*

Dado que A y B son matrices simétricas e idempotentes, se tiene:

x´Ax= x´AAx

x´Ax= x´A´Ax

x´Ax= (Ax)´Ax

x´Ax= g (Ax)

y

x´Bx= x´BBx

x´Bx= x´B´Bx

x´Bx= (Bx)´ Bx

x´Bx= g (Bx).

Luego, como Ax y Bx son transformaciones lineales de un vector normal estándar, se tiene:

Ax (, AA´)

Ax (, A)

y

Bx (, BB´)

Bx (, B).

Entonces, se tiene:

Cov (Ax, Bx)= E [(Ax) (Bx)´]

Cov (Ax, Bx)= E (Axx´B)

Cov (Ax, Bx)= A E (xx´) B

Cov (Ax, Bx)= A E (xx´) B

Cov (Ax, Bx)= AB

Cov (Ax, Bx)= AB.

Por lo tanto, si AB= 0, entonces, Ax y Bx son independientes (por tratarse de vectores normales) y, si estos lo son, las formas cuadráticas x´Ax y x´Bx también lo son.

**Ejercicio 4.**

*Sean x e y variables aleatorias con función de densidad conjunta:*

*(x, y)= , x, y ,*

*donde*

C= - 2 ,

= ,

= Var (X), = Var (Y).

*Mostrar que las variables aleatorias u y v, u= y v= , son independientes y tienen distribución normal con media cero y varianza 2 (1 + ) y 2 (1 - ), respectivamente.*